チャールズ・バベッジ"On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning"について (数学史の研究)

AUTHOR(S):

野村, 恒彦

数理解析研究所講究録
第 1583 巻 2008 年 246-254

チャールズ・バベッジ "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning" について

神戸大学大学院総合人間科学研究科　野村恒彦 (Tsunehiko Nomura)
Graduate School of Cultural Studies and Human Science
Kobe University

はじめに

19 世紀初頭の英国における数学は、ニュートン以来独自に発展した流率法が主流を占めており、その記述についても流率法に基づく記号を用いていた。一方ケンブリッジ大学では、ロバート・ウッドハウス (Robert Woodhouse) のように大陸特にフランスにおける記号を用いて、大きく発展した大陸の解析学の導入を進めようとした者もいたが少数にとどまることとなった[*1]。ウッドハウスに続いて、その大陸解析学の英国への導入に大きな役割を果たしたと考えられているのが、チャールズ・バベッジ (Charles Babbage) らがケンブリッジ大学の学部生時代に組織した解析協会 (Analytical Society) である。協会はニュートン以来使用されていたドットから、ライプニッツが使用していた d への変革を標榜していた。このように、英国において大陸解析学の導入が始まろうとしていた当時においては、使用する記号についても大きな意味を持っていたのである。

本論文ではバベッジの関心の一つである記号法について、"On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning"[*2] をもとに、バベッジが考えていた記号法とはどのようなものであったかを考えてみたい。なお、本発表に関連した重要な先行研究としては、ダビー（参考文献 [9]）がある。

ダビーの *The Mathematical Works of Charles Babbage* では、バベッジの記号法 (Notation) についての論文を 19 ページを費やして論じている。その中で本論文については、「題名は非常に興味深いが、大変失望させられる」と述べて、あまり高い評価を与えてはいない。論文の内容についても、本稿の２．３で述べる「幾何学と比較しての文字の効果」及び２．４で述べる「解析学における３つの段階」がやや詳細に検討されている程度である。しかし本論文は確かに論旨が明確ではないが、今述べた 2 点以外に「均整 (symmetry) の問題」や「文字の使い方」について論じた部分にも、記号法について非常に重要な論点があることを指摘しておきたい。

1　バベッジの記号法に関する論文について

バベッジの記号法に関する論文は、表 1 に掲げたようなものがある。ここで注意をしておかなければならないのは、論文の学会誌掲載年 (公刊年) と論文が発表された年との相違である。表 1 では、は学会誌掲載年 (公刊年) と発表年をあわせて記載した。表中、1 については、本論文集は書下ろしであったため、発表年を 1813 年とし、4 は百科事典と 1 項目として執筆されたが、編者であるブリュースターとの書簡により確認される執筆年月[*3] を発表年とした。

[*1] 代表的な著作として、R. Woodhouse, *Principles of Analytical Calculation* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1803) がある。

[*2] Ch. Babbage, "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 2, 1827, pp.325-77

[*3] J. M. Dubbey, *The Mathematical Works of Charles Babbage*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004), p.167

番号	論文名	公刊年	発表 (執筆) 年月
1	"Preface" to *Memoirs of the Analytical Society*	1813	1813
2	"Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions"	1822	1820.5
3	"On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning"	1827	1821.5
4	"Notation"	1830	1822.2

表 1　バベッジの公刊された記号法に関する論文

表に 1 として掲げられている "Preface" to *Memoirs of the Analytical Society* は、バベッジがケンブリッジ大学の学部生時代に、大陸 (特にフランス) から解析学を英国に導入しようとして組織した解析協会 (Analytical Society) が刊行した唯一の論文集の序文である。この論文集の序文は大陸解析学の現状について詳細に報告していることが特徴とされているが、表記が大陸で使われている記号法のみで占められていることや、階乗や指数関数の記述法等の検討などに見られるように、一部ではあるが記号法に関する論文と捉えることも可能である。

この表を見ると、バベッジによって記号法に関する論文が書かれたのは、1820 年代前半に集中していていることが理解できる。バベッジの数学に関する論文は、1813 年から 1820 年にかけては関数の微積分学 (Calculus of Functions) についての論文が多数を占めていたが、1820 年以降については記号法の論文が主要なものとなっており、大きな変化が見られる。この変化の直接の原因として、1819 年にバベッジたちが行った大陸旅行で、彼らがラプラスに出会ったことが関係しているものと考える*4。それまで大陸特にフランスにおける解析学を英国に導入するために、バベッジが集中して取り組んでいたものは、ラグランジュの手法をもとに関数の級数展開による手法であった。ところが大陸旅行でのラプラスとの出会いにより、バベッジはこのラグランジュが用いていた手法が、フランスにおける解析学の主流を占めるものではないことを知ることになったのは十分に考えられることである。その結果、関数の微積分学に対する興味が薄れていったことも想像に難くない。

一方記号法については、ケンブリッジ大学の学部生時代に組織した解析協会 (Analytical Society) が大陸の記号法である *D*-ism を主張していたことから、その時代から興味の中心の一つであったことは明白である。バベッジ最も集中して取り組んでいた関数の微積分学についての興味が前述の理由により薄れていったことから、関心は記号法に傾いていったことは容易に理解できる。

1830 年に公刊された "Notation" を最後に、バベッジはその後数学を主題とする論文を発表することはなかった。その最大の理由は、同じ 1819 年の大陸旅行で構想のヒントを得たとされる階差エンジンについて、1822 年に王立協会会長であるハンフリー・デイヴィーあて手紙を送付して資金的な援助を求めたのを機に*5、バベッジがその設計製作に全情熱を傾けるようになったためである。

2　"On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning" の内容

本論文では数多くの話題が取り上げられているが、それが原因となって、まとまった議論がなされていないとの指摘がある*6。実際に話題は次表に掲げるとおり多岐にわたっており、その論旨も明確とは言いがたい面

*4 Ch. Babbage, *Passage of the Life of a Philosopher* (London: William Pickering, 1994), pp.145-6

*5 Ch. Babage, *A Letter to Sir Humphry Davy, Bart, President of the Royal Society, on the application of Machinery to the purpose of calculating and printing mathematical tables* (London: J. Booth; Baldwin, Cradock and Joy, 1822)

*6 Dubbey, *op. cit.*, p.162

もある。と言うのは、話題を深く追求しているかと思えば、突然別の話題が取り上げられるといったことが原因となっていると考えられる。例えば、弦についてその長さの議論を行っていたが、議論の末尾ではいつのまにかポリスマタについて述べているといったものも見受けられる*7。

従って、論文に取り上げられた話題について、特に重要な事項について述べることにする*8。

番号	話題
1	記号について
2	簡潔な記述について
3	幾何学と比較しての文字の効果について
4	適切な記述方法について
5	賭けについて
6	解析学における3つの段階について
7	7角形について
8	弦について
9	ラプラス『天体力学』で示される方程式について
10	均整の問題について
11	文字の使い方について
12	一般化の効果について
13	幾何学における記号の使用について
14	適切な記号の導入について

表2　"On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning" で取り上げられた話題

2．1　記号について

ここでは、記号を使用するにあたっての一般的な注意事項が述べられる。その中では、後に書かれることになる "Notation" で主張されるようなルールの萌芽が見られる。そこではまず、次のような文章により記号の多さについてが指摘なされる*9。

> 時間は微積分学のいろいろな関係を発展させたが、またそれは異なった性質をもつデータの集まり、未完成の理論の断片についての理解、特定の目的のための工夫、明確には定義されていない記号を用いているにもかかわらず十分に一般的であると考えられている見解、同じような困難性により結びつけられた一つの結論を導く多くの方法を蓄積してきた。
>
> そしてその中でも、科学全体について考えてみる中で、適切な訂正がなくては、私たちの進歩を促すかわりに困難さを増すようになるという点において、最悪なものは記号の多さである。

---

*7 Ch. Babbage, "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning", *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 2, 1827, pp.353-5

*8 本文中では話題ごとに明確に区分はされていないが、ここでは取り上げられた話題を順に番号付けすることとした。

*9 *Ibid*, p.326

ここで指摘されるのは記号の多さによる混乱である。これは記号を使用するにあたっては、できるだけその種類を少なくしなければならないことをバベッジは主張していることになる。これと同じ「必要なしに記号は増やさない」という見解が "Notation" で主張されている[*10]。

次に指摘されるのは、記号に持たせる意味についてである[*11]。

> 通常の言語であれば、1つだけの意味をもつものは稀であるが、解析学の言語において、記号は1つ以上の意味を持つものは少ししかない。代数的な記号が1つ以上の意味を持つときには、それらは常に正しく定義され区別されている。同じ演算を意味するいくつかの記号が存在するが、それらの唯一の違いは外見上のものである。そして、通常の言語では言葉の意味は次第に変化していってしまい、同意語と呼ばれてもよい単語の意味の正しい範囲を示すことは難しくなってしまう。

ここでの指摘は、日常使用している言語は1つ以上の意味を持つものが大多数であり[*12]、また時代が経過するに従って意味が変化するということもあり得るが、解析学で使用される記号については、そのようなことは許されないということである。これも「1つの事柄に1つの記号を使う」という "Notation" で主張と同一のものであると考えることができる[*13]。

2．2　簡潔な記述について

ここでは、1822年に本論文に先だつものとして発表された "Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions" の末尾で展開された議論が再度述べられる[*14]。そしてバベッジは、関数において繰り返される演算についての簡潔な記述について、次のような重要な指摘を行っている[*15]。

> 通常の言語では多くの行もしくは多くのページを必要とするような意味を小さな空間に縮めるよう、うまく工夫された記号としての「べき」の例に、読者は気がつくであろう。関数の微積分学においては、この短縮は解析学の他の分野に比して非常に大きな拡張をもたらしている。しかもなお理解をすることが難しくなるどころか、もしそれらがくどくどと書かれるよりも、非常に短時間で理解される表現である。

以上のように述べた後、バベッジは以下のような式を例として掲げている。ここで、$\psi^{\overline{2,2}}(x,y)$ という表現は、$\psi(\psi(x,y),\psi(x,y))$ を意味している。

$$\psi^{\overline{9,9}}(x,y) = (x,y)$$

この左辺を詳細に書くとなると、x と y は257回、ψ は512回、コンマは257回、括弧は512組を使うことになり、記号全体として2307個を使用することとなる[*16]。ところが、「べき」を用いると簡潔な記述が可能となるとバベッジは指摘しているのである。

[*10] Ch. Babbage, "Notation" , *Edinburgh Encyclopaedia*, Vol.15, 1830, p.396

[*11] Ch. Babbage, "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning" , *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 2, 1827, p.327

[*12] 例えば、Ball という単語は球という意味もあるが、舞踏会という意味もある。

[*13] Ch. Babbage, "Notation" , *Edinburgh Encyclopaedia*, Vol.15, 1830, p.395

[*14] Ch. Babbage, "Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions" , *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 1, 1822, p.76

[*15] Ch. Babbage, "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning" , *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 2, 1827, p.331

[*16] この ψ は512回、括弧は512組を使用するというのは誤りである。正しくは、ψ は511回、括弧は511組を使用している。

この同様な計算を繰り返すことを指数で表して簡潔に記述するという方法は、指数が繰り返しを意味していることから、バベッジ強く主張する記号の使用法の一つである。

ところで先述した "Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions" 末尾での方程式の例は、$\psi^{10,10}(x,y)=\psi(x,y)$ となっている。同論文では、x と y は 512 回、ψ は 1023 回、記号全体として 2047 個を使用するとなっているが、これは括弧を除いた数である。[*17]。

2．3　幾何学と比較しての文字の効果について

ここでの話題では、バベッジは文字を使って表す方法を、幾何学における表現と比較して、その有利性について主張している。そして、次のような 2 次方程式を例にあげて具体的な説明を行っている。

$$x^2+3=4x, \qquad x^2+a=bx$$

ここでの主張は、数字を使用した前者よりも文字を使用した後者の方が、数の値にとらわれずに思考が可能であるということである。すなわち、方程式の解は具体的な数字とは別物であり、そして文字を使用して表した方がすべての値について真であるとバベッジは述べているのである[*18]。

次に、幾何学との比較がなされる。まず、幾何学における線分について、もし線分が数字を表すのに利用されるなら、基準となる線が必要であると説明がなされる。一方、代数学のように数字を文字で表すなら、そのような基準は不必要であるとし、前者はその性質上誤りが発生しやすいが、後者はそのようなことはないとバベッジは主張する[*19]。

また、バベッジは幾何学で使われている記号の特徴として、しばしばそれらが表す「種の個体」(individual of spicies) であるとの説明する一方、代数学においてはその背景の種との結びつきは任意であり、他の文字に優先して個体として注意をひくものではないとの比較を行っている[*20]。これを具体的な例をあげて説明すると次のようになる。

幾何学において円 O が与えられたとして、この O は円というものの一つを表す記号として用いられている。ところが代数学においては円を表すのは数式であり、個々の文字と円とは何の関係もないということである。

2．4　解析学における 3 つの段階について

バベッジは、解析学のいろいろな問題への適応については 3 つの明確な段階があるとして、次のように述べている[*21]。

> 提出された様々な問題への解析学の適用においては、それぞれに特別な規則に従い、またそれぞれの難しさをもつ 3 つの明確な段階がある。これらが互いに続いていく順序は、それぞれの段階における注意すべき事項によって次のように規定される。
>
> (1) 第 1 の段階は、与えられた問題を解析の言語に移し変えることから成る。
>
> (2) 第 2 の段階では、第 1 の段階で翻訳された解析的問題を解くために行うべき必要な操作の体系を理解する。

[*17] 本論文と同じように考えれば、x と y は 512 回、ψ は 1023 回、コンマは 512 回、括弧は 2046 個を使うこととなり、記号全体としては 4605 個を使用することになる。

[*18] *Ibid*, p.336

[*19] *Ibid*, p.337

[*20] *Ibid*, p.338

[*21] *Ibid*, p.345-6

(3) 第3そして最後の段階は、解析的過程の結果を普通の言語に再翻訳することから成る。

ここでのバベッジによる指摘は非常に重要なものと考えることができる。というのは、解析学が現実に適用されるという状況を考慮しての記述だからである。ではバベッジは、これらの3つの段階について、どのように考えているのかを見てみることにする。

まず第1の段階では、与えられた問題を解析の言語に翻訳することになる。そこでは「翻訳には多大な注意が必要とされる。と言うのは正しく翻訳がなされなかった場合には、それ以降の段階での作業が無意味になるのは明白である。*22」とし、この段階の重要性が述べられる。

そして、この段階の結果は1つもしくはそれ以上の方程式に帰着されることにあり、それらは主に物理学への適用の中で生じたものであると指摘する。しかしそれらがすべてではなく、級数の係数の問題や差分方程式に帰着する非常に多くの確率についての問題がある。

さらに、この段階での解析の言語への翻訳は、誤りを見つけることが非常に難しいことや、誤りを取り除くことも困難であることを述べた後、「最も難解な問題のそれぞれの部分においてさえ、問題を単純化する前に、解析の言語にすべて翻訳しておくことは、いくら推奨してもし過ぎることはない。*23」という注意を喚起している。

第2の段階では、移し変えられた方程式から始まり、目的はその解を求めることであるとしているが、この段階が始まる時点はそれが終わる時点よりも明確には定められていないとしている。そして、「これは特殊な場合ではあるが、幾何学的図形に関連した問題の時には、第1の段階と第2の段階は交錯している。*24」と指摘する。

そして問題は純粋に解析学的なことになると述べ、1つもしくはそれ以上の方程式の解を求めることは時折困難であるとして、微分方程式や有限差分方程式は物理学的な問題を表したものとは別の解析学的な問題となると言及している。これらの多くは近似的にしか解くことができないこともあわせて述べた上、いろいろな近似の方法や正確さを追求した近似の方法が工夫されていることを紹介している。この代表的な問題として、月の位置を決定する三体問題があることも述べられている。

第3の段階は、問題の解により与えられるが、他の段階に比してより軽視されているとバベッジは指摘して、それは問題の解を見出すことが大きな障害になっていて、十分な注意が払われていないからと思えるとしている。そして、既に述べたような解に含まれる誤りではなく、解析学が与えた結果に含まれる異なった状況のすべての意味に関して、十分な指示が初期の段階で与えられていなかったためと主張する*25。

以上のように解析学の3段階について非常に詳細な注意が述べられており、これはバベッジが純粋数学のみならずその応用について留意すべき点にも目が配られていたことを示すものである。

2．5　均整 (symmetry) の問題について

ここではまず、直線を表す次のような4つの式の組を考えてみることをバベッジは提案する。

$$
\begin{array}{llll}
y = ax + b & y = ax + \alpha & y = ax + b & y = ax + b \\
y = a'x + b' & y = bx + \beta & y = \alpha x + \beta & y = cx + d
\end{array}
$$

すると、それぞれの組の直線の交点は次のような式で与えられる。

*22 *Ibid*, p.346
*23 *Ibid*, p.347
*24 *Ibid*, p.347
*25 *Ibid*, p.348

$$y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}, \quad y = \frac{a\beta - b\alpha}{a - b}, \quad y = \frac{a\beta - \alpha b}{a - \alpha}, \quad y = \frac{ad - cb}{a - c}$$

続いてそれぞれの結果について、バベッジの意見が述べられる[*26]。それは記号の使い方よりも、どちらかと言えば均整のとれた並べ方と言ったほうが的確なものである。

まず、最後の式は文字についての均整を欠いており、数多くの直線が与えられた場合には、結果を表現する形式としてはより混乱が生じるとしている。これは、直線の傾きと y 切片の文字を次々と新しい文字を使用することにより、混乱を招きやすいというバベッジによる指摘である。

そして、最初の式と第 3 の式は、a が直線の傾きで b は y 切片であることを覚えておけば十分であるが、それに比して最後の式は各文字が何を表しているのかを、問題を代数的表現に変化させた時のことを思い出す必要があるとバベッジは述べる。先述したように最後の式は文字を数多く使うことになるが、これら文字の多さが、それぞれの文字が何を意味するのかがわからなくなるということも、バベッジはあわせて指摘する。

さらに、第 2 の式は、直線の傾きがイタリックの文字で、y 切片がギリシャ文字で表されている。これら 2 つのアルファベットの意味を置き換えることによって、いっそう良くなるであろうとの言及がある。ここでのバベッジの指摘は直線の傾きをギリシャ文字で表し、y 切片をアルファベットで表した方がより良くなるとの提案である。

この均整の問題は、後の "Notation" では話題とされていないが、記号の遣い方のあるべき姿として、またその理解しやすさの問題として重要な指摘であると考えることができる。

2．6　文字の使い方について

ここではまず、A と B が距離を置いてあり、それぞれの速度で動く場合 A と B が出会う地点を求める問題が提示される。

それぞれのデータは次のように与えられて、解答が提示される[*27]。

(1) A が c の距離を動くのに f の時間を要し、B が d の距離を動くのに g の時間を要したとする。また、A と B の最初の距離を e とし、離れている時間を h とする。すると出会う地点までの距離を x とすれば、x は次のように求められる。

$$x = \frac{cge - cdh}{cg + df}$$

(2) v を A の速度、v' を B の速度、s を A と B の距離、t を A と B が出会うのに要する時間とする。x を A と B が出会う地点から A の最初の位置との距離とすると、x は次のようになる。

$$x = v\frac{s + tv'}{v - tv'}$$

同じ問題を異なった代数的表記で表し、そしてまた一般の言語に戻すという上記の 2 種類の方法は、いくつかの考察をあたえてくれるとバベッジは述べ、そして先程の 2 つの記述を比較検討している。すると、2 つの点において (2) の方が有利であることがわかるとのバベッジは言及する。まず、(2) の場合は 2 つの文字を 1 つの文字で置き換えていることがその理由であり、そしてもう一つの理由として、力学では (2) のように表すのが一般的であり理解しやすいからであると指摘する。これは A と B の速度のことを意味している。すなわ

*26 *Ibid*, pp.364-5
*27 *Ibid*, p.363

ち (2) では A の速度と B の速度を、v、v' で表記しているのに対して、(1) では $\frac{c}{f}$、$\frac{d}{g}$ で表記しなければならないということである。

ここで、バベッジは文字の使用法について言及する。それは、(2) で使用されている s と t の記号は、それぞれ間隔 (space) と時間 (time) という言葉から使用しているというものである。すなわち、この文字の使い方は、表現しているものを容易に思い起こさせることから採用されたものであることを指摘している*28。

これらのことは、2．4で述べた第1の段階では少し効果があり、第2の段階では効果はないが、第3の段階ではトラブルを防ぐ効果があるとのバベッジの言及は、非常に重要である。これは第1の段階での使用する文字の選択は完全に自由であり、第2の段階ではどのような文字が使われていてもほとんど影響はないが、第3の段階では文字を元の意味に戻す際には使用する文字の選択は大きな関係があることを意味している。すなわち第3の段階で、使用している文字から元の意味が容易に連想しやすいものを、第1の段階で選択しておく必要があるということである。

2．7　一般化の効果について

この一般化の効果のところで述べられる事項についても非常に重要な内容を含んでいおり、バベッジはそれを次のように指摘する*29。

> 10の場合が考えられる問題を考えてみよう。もし私がたちが、それらのどれかを代数的言語の理解が容易な性質を持ち、単純な表現としてすべてが含まれている方程式に移し変えられたとするなら、私たちは9つを取り扱う方法について知らなくてもよく、そのうちの1つを扱うことで十分である。

これは問題を文字を用いて一般化することにより問題がパターン化され、個々の問題について解くよりも、一般化されたものを解いたほうが問題すべてを一度に解決することになるということである。

そして、使用する記号を選ぶ場合には、それが表現するものをたやすく連想させるものを選択するのは利益があることについてはあまり注意が払われていなかったとして、「問題が複雑に複雑になればなるほど、記号はどんどん多くなることになる。その配列が均整を受けにくくなればなるほど、そのシステムがより欠くことのできないものとわかる」と述べ、「この規則は記号の使用を制限するものではなく、可能であれば新しい記号を使う場合に適応することを意味する」とあわせて言及している*30。この主張は、2．6で述べたものと同一のことである。

あわせて、記号として何を用いるかを選択することや、その置く場所によって数学的思考による結論の正確さが得られるであろうことをバベッジは指摘していることも注意をしておく必要がある。

むすび

解析協会の主張であった「Dot-ism から *D*-ism への変革」ということからもわかるように、バベッジはケンブリッジ大学時代から記号法には深い関心があった。また既に述べたように、記号法を話題の中心とする論文は1820年代前半に主に発表されている。バベッジの関心の一つである記号法についての本論文 “On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning” は、その記号についての考え方において1830年の “Notation” へと続くものと位置づけることができる。そこでは “Notation” で主張される記号の使用法に関する規定の萌芽をみることができる。

---

*28 *Ibid*, p.368
*29 *Ibid*, p.369
*30 *Ibid*, p.370

しかし、ダビーが指摘するように、この論文は数多くの事項について述べられており、まとまった議論がなされていないとの指摘がある。実際に本論文の内容は多岐にわたっており、論点を深く追求していくような経過をたどっていても、明確な結論が導き出されていない場合が数多く見受けられる。

しかし本論文では、ルールとしてはまだ確立されてはいないが、「代数的な記号が 1 つ以上の意味を持つときには、それらは常に正しく定義されている」といった表現に見られるように、「1 つの事柄に 1 つの記号を使う」と “Notation” において主張されるルールについての基本的な考え方は既に表されている。それらはまた、解析学における 3 つの段階、指数表記による簡潔な記述、そして均整の問題等を指摘したことにも見られる。“On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning” では、まだこれらの議論については荒削りな面が見られる。しかし、その記号の取り扱いをめぐっての議論には非常に重要な事項が含まれていることは、既に述べたとおりである。そしてそのような問題を提起したからこそ、バベッジは 1830 年の “Notation” において、記号の使用法についての 11 のルールを示すことができたのである。

参考文献

1. Babbage, Ch., with J. F. W. Herschel, “Preface” , *Memoirs of the Analytical Society* (Cambridge, 1813), i-xxii
2. Babbage, Ch.,“Observations on the Notation Employed in the Calculus of Functions”, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 1, 1822, pp.63-76
3. Babbage, Ch., “On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning” , *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.2, 1827, pp.325-77
4. Babbage, Ch., “Notation” , *Edinburgh Encyclopaedia*, Vol.15, 1830, pp.394-9
5. Babbage, Ch., *Passaage from a Life of Philoshopher* (London: Longman, 1864); (London: William Pickering, 1994)
6. Becher, H. W., “Woodhouse, Babbage, Peacock, and Modern Algebra” , *Historia Mathematica*, 7, 1980, pp.389-400
7. Cajori, F., *A History of Mathematical Notations* (Chicago: Open Court Pub., 1928-9)
8. Dubbey, J. M., “Babbage, Peacock and Modern Algebra” , *Historia Mathematica*, Vol.4, 1977, pp.295-302
9. Dubbey, J. M., *The Mathematical Works of Charles Babbage*, (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1978); (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004)
10. Enros, P. C., *The Analytical Society: Mathematics at Cambridge University in the Early Nineteenth Century* (Toronto: University of Toronto, 1979, Unpubished)
11. Enros, P. C., “The Analytical Society (1812-1813): Precursor of the Renewal of Cambridge Mathematics” , *Historia Mathematica*, Vol.10, 1983, pp.24-47
12. Enros, P. C., “Cambridge University and the Adoption of Analytics in Early Nineteenth-Century England” , *Social History of Nineteenth Century Mathematics* (Boston: Birkhauser, 1981), pp.135-47
13. Phillips, C., “Robert Woodhouse and the Evolution of Cambridge Mathematics” , *History of Science*, Vol. pp.69-93